This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 2318.92.5

Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,

AND HIS WIDOW,

ELIZA FARRAR,

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."

22 July, 1901.

SCIENCE CENTER LIBRARY

1-616

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

ALLGEMEINSTE LINEARE SUBSTITUTION

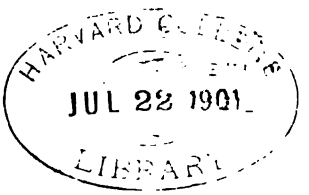
DEREN POTENZEN EINE ENDLICHE GRUPPE BILDEN

VON

DR. GEORG ROST.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

Math 2318.92.5



Farrar fund

Sind $p+1$ denselben Träger besitzende und auf dasselbe Coordinatensystem bezogene ebene Punktgebiete von je n Dimensionen:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}),\ \ldots,\ (y_1^{(p)}, y_2^{(p)}, \ldots, y_n^{(p)})$$

gegeben, und bezieht man alsdann, vom zweiten angefangen, ein jedes dieser Gebiete auf das vorangehende durch dieselbe lineare Substitution $\{A\}$ mit den Coefficienten a, setzt also:

$$y_\varrho^{(1)} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\varrho\sigma} x_\sigma, \quad y_\varrho^{(2)} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\varrho\sigma} y_\sigma^{(1)}, \quad \ldots, \quad y_\varrho^{(p)} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\varrho\sigma} y_\sigma^{(p-1)},$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots, n \qquad \varrho = 1, 2, \ldots, n \qquad \varrho = 1, 2, \ldots, n$$

so sind dadurch je zwei dieser Gebiete in ihren Punkten wechselseitig eindeutig auf einander bezogen, und speciell entspricht dem Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des ersten Gebietes der durch das Gleichungensystem:

$$y_\varrho^{(p)} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\varrho\sigma}^{(p)} x_\sigma,$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots, n$$

$$a_{\varrho\sigma}^{(p)} = \sum_{x_1=1}^{x_1=n} \sum_{x_2=1}^{x_2=n} \sum_{x_3=1}^{x_3=n} \cdots \sum_{x_{p-1}=1}^{x_{p-1}=n} a_{\varrho x_1} a_{x_1 x_2} a_{x_2 x_3} \cdots a_{x_{p-1}\sigma}, \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmte Punkt $y_1^{(p)}, y_2^{(p)}, \ldots, y_n^{(p)}$ des p^{ten} Gebietes. Dieses Gleichungensystem, als lineare Substitution aufgefasst, wird die p^{te} Potenz der Substitution $\{A\}$ genannt und mit $\{A\}^p$ bezeichnet. Bei besonderer Beschaffenheit der Coefficienten a kann es vorkommen, dass jeder Punkt des p^{ten} Gebietes mit dem ihm entsprechenden Punkte des ersten zusammenfällt. Für das Eintreten dieses Falles ist es nothwendig und hinreichend, dass die Coefficienten a der verwendeten Substitution den n^2 Gleichungen:

$$\sum_{x_1=1}^{x_1=n} \sum_{x_2=1}^{x_2=n} \sum_{x_3=1}^{x_3=n} \cdots \sum_{x_{p-1}=1}^{x_{p-1}=n} a_{\varrho x_1} a_{x_1 x_2} a_{x_2 x_3} \cdots a_{x_{p-1}\sigma} = \delta_{\varrho\sigma} \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen — wobei für $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$ unter $\delta_{\varrho\sigma}$ eine Grösse zu verstehen ist, die für $\varrho = \sigma$ den Werth 1, für $\varrho \neq \sigma$ dagegen den Werth 0 besitzt —, und die entsprechende Substitution ist dann eine jener ausgezeichneten Substitutionen, deren Potenzen eine endliche Gruppe bilden. Sollen umgekehrt die Potenzen einer linearen Substitution $\{A\}$ eine endliche Gruppe bilden, so müssen, wie in Art. 1 des Näheren ausgeführt wird, die Coefficienten a derselben einer Gleichung von der zuletzt angeschriebenen Gestalt genügen. Die Aufgabe, die allgemeinste lineare Substitution $\{A\}$ zu bestimmen, deren Potenzen eine endliche Gruppe bilden, ist daher identisch mit der Aufgabe, die n^2 Coefficienten a derselben in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass sie der auf eine beliebige positive ganze Zahl p bezogenen, zuletzt angeschriebenen Gleichung genügen.

Diese Aufgabe hat für den Fall $p = 2$ oder, was dasselbe, für den Fall der involutorischen Substitutionen schon ihre vollständige Erledigung durch eine Arbeit meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Prym*), erfahren. Die Grundlage für die Untersuchung bildet dort, ebenso wie in einer damit zusammenhangenden Arbeit des Herrn Cornely**), eine eigenthümliche, aus den Coefficienten a der zu untersuchenden Substitution und zweiten Einheitswurzeln gebildete Determinante $A_{(\varepsilon)}$, welche auch in der Theorie der orthogonalen Substitutionen eine hervorragende Rolle spielt. Von Herrn Prym wurde ich nun veranlasst, zu untersuchen, ob der allgemeine Fall nicht nach ähnlichen Principien behandelt werden könne. Da kam es denn vor Allem darauf an, das Analogon der Determinante $A_{(\varepsilon)}$ für beliebiges p zu finden. Erst nach manchen vergeblichen Versuchen gelang es mir, ein aus den Coefficienten a der Substitution $\{A\}$ und p^{ten} Einheitswurzeln in eigenthümlicher Weise zusammengesetztes Gebilde, die in der Arbeit mit $D_{(\tau)}$ bezeichnete Determinante zu finden, welche im allgemeinen Falle dasselbe leistet wie die Determinante $A_{(\varepsilon)}$ im Falle $p = 2$, und welche daher als die richtige Verallgemeinerung dieser letzteren

---

*) Prym, F., Ueber orthogonale, involutorische und orthogonal-involutorische Substitutionen (Abhandl. d. math. Classe der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. XXXV pag. 1. — Separatabzüge bei Dieterich, Göttingen.)

**) Cornely, A., Untersuchungen über involutorische Gleichungensysteme. (Inaugural-Dissertation, Würzburg, 1891.)

anzusehen ist. Mit ihrer Hülfe konnte ich dann auch einen einfachen, aus dem Wesen der Sache geschöpften Beweis für die Möglichkeit der Reduction der Substitution $\{A\}$ auf die sogenannte kanonische Form erbringen, und es wurde dadurch zugleich die wahre Natur der von Herrn Cornely, in Art. 5 seiner Arbeit, für den Fall $p = 2$ gegebenen Reduction aufgedeckt.

Was den Gang der folgenden Untersuchungen betrifft, so werden zunächst in Art. 1 im Anschlusse an eine Abhandlung des Herrn Frobenius*) einige für das Folgende wichtige Definitionen und Bezeichnungsweisen zusammengestellt. In Art. 2 werden dann gewisse Haupteigenschaften des zu untersuchenden Systems A der Grössen a durch Betrachtung der zu demselben gehörigen charakteristischen Function abgeleitet. Art. 3 beschäftigt sich mit der Bildung und den Eigenschaften der schon oben erwähnten Determinante $D_{(x)}$, und im Anschlusse daran bringt Art. 4 die Reduction des Systems A auf die kanonische Form. Beweise für die Möglichkeit dieser Reduction haben schon die Herren Jordan**), Lipschitz***), Kronecker†) gegeben, jedoch ohne diese Reduction wirklich durchzuführen. Nachdem dann noch in Art. 5 der innere Zusammenhang zwischen dem Systeme A und der auf dasselbe bezogenen Determinante $D_{(x)}$ eingehend erörtert worden, wird schliesslich in Art. 6 die endgültige Darstellung des Systems A durch eine geringste Anzahl unabhängiger Parameter gegeben.

1.

In diesem Artikel sollen einige Definitionen und Bezeichnungen, die für die folgenden Untersuchungen von Bedeutung sind, zusammengestellt werden.

---

*) Frobenius, G., Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. (Journal f. r. u. a. Mathematik, Bd. 84, pag. 1.)

**) Jordan, C., Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. (Journal f. r. u. a. Mathematik, Bd. 84, pag. 112.)

***) Lipschitz, R., Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen. (Acta mathematica, Bd. 10, p. 137.)

†) Kronecker, L., Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. (Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1890, pag. 1081.)

Die je n^2 Grössen enthaltenden Systeme:

$$\begin{matrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \cdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} c_{11} \cdots c_{1n} \\ \cdots \\ c_{n1} \cdots c_{nn} \end{matrix} \quad , \quad \cdots$$

sollen zur Abkürzung mit

$$A \quad , \quad B \quad , \quad C \quad , \quad \cdots$$

und die ihnen entsprechenden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \cdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} \cdots c_{1n} \\ \cdots \\ c_{n1} \cdots c_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots$$

zur Abkürzung mit

$$|A| \quad , \quad |B| \quad , \quad |C| \quad , \quad \cdots$$

bezeichnet werden.

Die Gleichung $A = B$ soll ausdrücken, dass für $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$ $a_{\varrho\sigma} = b_{\varrho\sigma}$ ist. Aus $A = B$ folgt $|A| = |B|$.

Unter gA ist dasjenige Grössensystem zu verstehen, welches aus A hervorgeht, wenn man die sämmtlichen Grössen a mit einer Grösse g multiplicirt; in dem besonderen Falle, wo $g = -1$ ist, wird für das entstehende System das Zeichen $-A$ verwendet. Infolge dieser Definition ist $|gA| = g^n|A|$ und speciell $|-A| = (-1)^n|A|$.

Ein System S, dessen Grössen s sich aus den Grössen $a, b, c, \ldots, f$ der p Systeme $A, B, C, \ldots, F$ den Gleichungen:

$$s_{\varrho\sigma} = a_{\varrho\sigma} + b_{\varrho\sigma} + c_{\varrho\sigma} + \cdots + f_{\varrho\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

gemäss zusammensetzen, soll mit $A + B + C + \cdots + F$, die ihm entsprechende Determinante mit $|A + B + C + \cdots + F|$ bezeichnet werden. Das System $A + B + C + \cdots + F$ wird die Summe der p Systeme $A, B, C, \ldots, F$ genannt. Für die Bildung solcher Summen gilt das Associations- und das Commutations-Gesetz.

Ein System T, dessen Grössen t sich aus den Grössen $a, b, c, \ldots, f$ der p Systeme $A, B, C, \ldots, F$ den Gleichungen:

$$t_{\varrho\sigma} = \sum_{x_1=1}^{x_1=n} \sum_{x_2=1}^{x_2=n} \sum_{x_3=1}^{x_3=n} \cdots \sum_{x_{p-1}=1}^{x_{p-1}=n} a_{\varrho x_1} b_{x_1 x_2} c_{x_2 x_3} \cdots f_{x_{p-1}\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

gemäss zusammensetzen, soll mit $ABC\ldots F$, die ihm entsprechende Determinante mit $|ABC\ldots F|$ bezeichnet werden. Nach den für Determinanten geltenden Multiplicationsregeln ist dann:

$$|ABC\cdots F| = |A|\cdot|B|\cdot|C|\cdot\cdots\cdot|F|.$$

Mit Rücksicht darauf soll das System $ABC\ldots F$ das Product der p Systeme $A, B, C, \ldots, F$ genannt werden. Für die Bildung solcher Producte gilt das Associations-Gesetz, das Commutations-Gesetz dagegen im Allgemeinen nicht. Im Übrigen folgt aus den aufgestellten Definitionen noch die Richtigkeit der Gleichungen:

$$H(A + B + \cdots + F) = HA + HB + \cdots + HF,$$
$$(A + B + \cdots + F)H = AH + BH + \cdots + FH,$$
$$g_1 A \cdot g_2 B \cdot\cdots\cdot g_p F = g_1 g_2 \cdots g_p AB\cdots F.$$

Das mit p gleichen Factoren gebildete System $AA\ldots A$ soll die p^{te} Potenz des Systems A genannt und dementsprechend mit A^p bezeichnet werden. Unter A^1 ist das System A selbst zu verstehen. Die n^2 Grössen des Systems A^p, die mit $a^{(p)}_{\varrho\sigma}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, bezeichnet werden mögen, sind dann definirt durch die Gleichungen:

$$a^{(p)}_{\varrho\sigma} = \sum_{x_1=1}^{x_1=n}\sum_{x_2=1}^{x_2=n}\sum_{x_3=1}^{x_3=n}\cdots\sum_{x_{p-1}=1}^{x_{p-1}=n} a_{\varrho x_1} a_{x_1 x_2} a_{x_2 x_3}\cdots a_{x_{p-1}\sigma}. \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

Speciell ist $a^{(1)}_{\varrho\sigma} = a_{\varrho\sigma}$. Die Determinanten der Systeme A^p, A sind durch die Gleichung $|A^p| = |A|^p$ verknüpft.

Unter $\delta_{\varrho\sigma}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, sollen die durch die Gleichungen:

$$\delta_{\varrho\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{\nu(\varrho-\sigma)\frac{2\pi i}{n}} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

definirten n^2 Grössen verstanden werden. Es besitzt dann $\delta_{\varrho\sigma}$ für $\varrho = \sigma$ den Werth 1, für $\varrho \neq \sigma$ dagegen den Werth 0. Das System der n^2 Grössen δ werde mit Δ bezeichnet; es ist dann $\Delta^p = \Delta$, $A\Delta = \Delta A = A$. Die Determinante $|\Delta|$ besitzt den Werth 1.

Hat die Determinante $|A|$ einen von Null verschiedenen Werth, so existirt zu dem Systeme A immer ein und nur ein System B, welches der Gleichung:

$$AB = \Delta$$

genügt. Die aufgestellte Gleichung zieht nämlich die n^2 Gleichungen:

$$\sum_{x=1}^{x=n} a_{\varrho x} b_{x\sigma} = \delta_{\varrho\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

nach sich, und aus diesen ergeben sich, wenn man noch die Adjuncte des Elementes $a_{\varrho x}$ in der Determinante $|A|$ mit $\alpha_{\varrho x}$ bezeichnet, zur Bestimmung der n^2 Grössen b die Gleichungen:

$$b_{\varrho\sigma} = \frac{\alpha_{\sigma\varrho}}{|A|}. \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

Das so definirte System B soll das zu A reciproke genannt und mit A^{-1} bezeichnet werden. Es ist dann $AA^{-1} = A^{-1}A = \Delta$ und $|A||A^{-1}| = 1$.

Unter A^{-p} soll die p^{te} Potenz des Systems A^{-1} verstanden werden. Die n^2 Grössen des Systems A^{-p}, die mit $a_{\varrho\sigma}^{(-p)}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, bezeichnet werden mögen, sind dann definirt durch die Gleichungen:

$$a_{\varrho\sigma}^{(-p)} = \sum_{x_1=1}^{x_1=n} \sum_{x_2=1}^{x_2=n} \sum_{x_3=1}^{x_3=n} \cdots \sum_{x_{p-1}=1}^{x_{p-1}=n} \frac{\alpha_{\sigma x_1}}{|A|} \frac{\alpha_{x_1 x_2}}{|A|} \frac{\alpha_{x_2 x_3}}{|A|} \cdots \frac{\alpha_{x_{p-1}\varrho}}{|A|}. \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

Speciell ist $a_{\varrho\sigma}^{(-1)} = \frac{\alpha_{\sigma\varrho}}{|A|}$. Zwischen den Systemen A^p und A^{-p} besteht die Gleichung $A^p A^{-p} = \Delta$, die sich ohne Mühe, durch wiederholte Anwendung der Gleichungen $AA^{-1} = \Delta$, $A\Delta = A$, verificiren lässt. Das System A^{-p} ist daher das zu A^p reciproke System. Die Determinanten der Systeme A^{-p}, A sind durch die Gleichung $|A^{-p}| = |A|^{-p}$ verknüpft.

Versteht man nun noch unter A^0 das System Δ, sodass also $a_{\varrho\sigma}^{(0)} = \delta_{\varrho\sigma}$, so ist das Zeichen A^g unter der Voraussetzung $|A| \neq 0$ für jede ganze Zahl g definirt, und es besteht zudem für je zwei ganze Zahlen g_1, g_2 die Gleichung:

$$A^{g_1} A^{g_2} = A^{g_1 + g_2}.$$

Bildet man aus einem Systeme A, für welches $|A| \neq 0$ ist, durch Potenzirung die Systeme:

$$\ldots, A^{-2}, A^{-1}, A^0, A^1, A^2, \ldots.$$

so sind von diesen im allgemeinen keine zwei einander gleich. Ein System, unter dessen Potenzen gleiche vorkommen, ist daher als ein aus-

gezeichnetes System anzusehen. Man nehme an, dass für ein System A $A^s = A^r$, $s > r$, sei, dass dagegen von den Potenzen A^{r+1}, A^{r+2}, ..., A^{s-1} keine mit A^r übereinstimme. Beachtet man dann, dass aus der Gleichung $A^s = A^r$, wenn man linke und rechte Seite derselben mit A^{-r} multiplicirt und die positive ganze Zahl $s - r$ mit p bezeichnet, die Gleichung $A^p = \Delta$ folgt, so erkennt man zunächst, dass im vorliegenden Falle aus A durch Potenzirung im Ganzen nur p verschiedene Systeme:

$$A,\ A^2,\ \ldots,\ A^p$$

entstehen, oder, was dasselbe, dass die Potenzen von A eine endliche Gruppe mit der Ordnungszahl p bilden, und weiter, dass die Aufgabe, alle Systeme A zu bestimmen, bei denen die Potenzen eine endliche Gruppe bilden, identisch ist mit der Aufgabe, alle Systeme A zu finden, welche der auf eine beliebige positive ganze Zahl p bezogenen Gleichung $A^p = \Delta$ genügen. Diese Aufgabe soll jetzt behandelt werden.

2.

Zunächst sollen einige Eigenschaften eines Systems A, welches der Gleichung:

$$A^p = \Delta$$

genügt, abgeleitet werden.

Zu dem Ende bezeichne man, unter z eine complexe Veränderliche verstehend, die zu dem Systeme A gehörige charakteristische Function $|A - z\Delta|$ mit $f(z)$, sodass also

$$(1) \qquad f(z) = |A - z\Delta| = \begin{vmatrix} a_{11} - z & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - z \end{vmatrix}$$

ist, und bilde alsdann, indem man hier sowohl wie im ganzen weiteren Verlaufe der Arbeit unter ω die durch die Gleichung:

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

definirte Grösse versteht, das Product der p Functionen $f(z)$, $f(\omega z)$, ..., $f(\omega^{p-1}z)$. Man erhält dann zunächst die Relation:

$$f(z)f(\omega z)\cdots f(\omega^{p-1}z) = |A - z\Delta \quad A - \omega z\Delta \quad \cdots \quad A - \omega^{p-1}z\Delta|$$

und weiter, indem man die auf ihrer rechten Seite stehenden Determinanten auf Grund der Multiplicationsregel $|A||B|\cdots|F| = |AB\cdots F|$ zu einer einzigen Determinante zusammensetzt und beachtet, dass ω eine primitive p^{te} Einheitswurzel ist, die Relation:

$$f(z)f(\omega z)\cdots f(\omega^{p-1}z) = |A^p - z^p\Delta^p| = |(1-z^p)\Delta| = (1-z^p)^n.$$

Diese Relation zeigt, dass jede Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ immer auch eine Wurzel der Gleichung $z^p - 1 = 0$ ist, oder, was dasselbe, dass als Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ nur die Grössen $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^p$ auftreten können, und man erhält daher, wenn von den n Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ m_1 den Werth ω, m_2 den Werth $\omega^2, \ldots, m_p$ den Werth ω^p besitzen, schliesslich für $f(z)$ die Gleichung:

$$f(z) = (\omega - z)^{m_1}(\omega^2 - z)^{m_2}\cdots(\omega^p - z)^{m_p}. \tag{2}$$

Dabei ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass von den Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_p$, die immer durch die Gleichung $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ verknüpft sind, einige mit der Null zusammenfallen.

Der Zahlencomplex $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ soll die Charakteristik des Systems A genannt werden, und entsprechend soll gesagt werden, dass das System A zur Charakteristik $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ gehöre. Durch passende Bestimmung der n^2 Grössen a im Rahmen der Bedingung $A^p = \Delta$ kann man den Zahlencomplex $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ mit einem beliebig gewählten Zahlencomplexe $(m_1', m_2', \ldots, m_p')$, dessen Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots n$ angehören und durch die Gleichung $m_1' + m_2' + \cdots + m_p' = n$ verknüpft sind, zur Deckung bringen; man braucht zu dem Ende nur für $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$ $a_{\varrho\sigma} = \delta_{\varrho\sigma}\tau_\varrho$ zu setzen und von den n Grössen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ m_1' mit ω, m_2' mit $\omega^2, \ldots, m_p'$ mit ω^p zusammenfallen zu lassen. Zahlencomplexe $(m_1', m_2', \ldots, m_p')$ der angegebenen Art giebt es aber im Ganzen $\binom{n+p-1}{p-1}$, und in ebenso viele streng geschiedene Classen zerfallen daher die sämmtlichen der Gleichung $A^p = \Delta$ genügenden Systeme A.

Die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_p$ lassen sich als ganze rationale Functionen der n^2 Grössen a darstellen. Um diese Darstellung zu erhalten, verstehe man unter ν eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$, unter ε die durch die Gleichung $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\nu}}$ definirte Grösse, führe alsdann in die Gleichung:

$$f(z)f(\varepsilon z)\cdots f(\varepsilon^{\nu-1}z) = |A - zJ||A - \varepsilon zJ|\cdots|A - \varepsilon^{\nu-1}zJ|$$

an Stelle von $f(z), \ldots, f(\varepsilon^{\nu-1}z)$ die ihnen auf Grund der Gleichung (2) entsprechenden Ausdrücke ein, und fasse zugleich die rechts stehenden Determinanten, der Multiplicationsregel $|A||B|\cdots|F| = |AB\cdots F|$ gemäss, zu der einen Determinante $|A^\nu - z^\nu J|$ zusammen. Man erhält dann die Gleichung:

$$(\omega^\nu - z^\nu)^{m_1}(\omega^{2\nu} - z^\nu)^{m_2}\cdots(\omega^{p\nu} - z^\nu)^{m_p} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(\nu)} - z^\nu & \cdots & a_{1n}^{(\nu)} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}^{(\nu)} & \cdots & a_{nn}^{(\nu)} - z^\nu \end{vmatrix}$$

und weiter aus dieser, indem man den bei der Entwicklung der linken Seite nach ganzen Potenzen von z^ν auftretenden Coefficienten von $z^{\nu(n-1)}$ dem bei der Entwicklung der rechten Seite nach ganzen Potenzen von z^ν auftretenden Coefficienten von $z^{\nu(n-1)}$ gleichsetzt, die Relation:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} m_\lambda \omega^{\lambda\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} a_{\varrho\varrho}^{(\nu)}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Multiplicirt man nun, indem man unter μ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ versteht, linke und rechte Seite dieser Relation mit $\omega^{-\mu\nu}$ und summirt alsdann nach ν von 1 bis p, so erhält man die Gleichung:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} m_\lambda \left(\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \omega^{(\lambda-\mu)\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \omega^{-\mu\nu} a_{\varrho\varrho}^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

und schliesslich, indem man beachtet, dass die auf der linken Seite stehende, in runde Klammern eingeschlossene Summe, während λ von 1 bis p geht, nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth p erhält, wenn $\lambda = \mu$ wird, die Gleichung:

$$(3) \qquad p m_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \omega^{-\mu\nu} a_{\varrho\varrho}^{(\nu)}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

durch welche m_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, p$, da $a_{\varrho\varrho}^{(\nu)}$ nach Art. 1 eine ganze rationale Function der n^2 Grössen a ist, als ganze rationale Function der n^2 Grössen a dargestellt wird.

Mit Hülfe der Gleichungen (3) kann man für jedes gegebene der Gleichung $A^p = J$ genügende System die Charakteristik $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$,

zu der es gehört, unmittelbar bestimmen. Kennt man aber die Charakteristik eines Systems A, so lässt sich auch der Werth der ihm entsprechenden Determinante $|A|$, der immer eine p^{te} Einheitswurzel ist, sofort angeben. Zwischen der Grösse $|A|$ und den Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_p$ besteht nämlich die Beziehung:

$$|A| = \omega^{m_1 + 2m_2 + \cdots + pm_p}. \tag{4}$$

Man erhält dieselbe, wenn man in der Gleichung (2) $z = 0$ setzt und beachtet, dass der Gleichung (1) zufolge $f(0) = |A|$ ist.

3.

Weitere Eigenschaften des in Rede stehenden Systems A, die bei den späteren Untersuchungen eine hervorragende Rolle spielen werden, ergeben sich durch Betrachtung einer eigenthümlichen Function F, die jetzt definirt werden soll.

Man verstehe unter $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ p^{te} Einheitswurzeln, von denen r_1 mit ω, r_2 mit ω^2, $\ldots$, r_p mit ω^p zusammenfallen mögen, und bezeichne das System:

$$\begin{matrix} \tau_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_n \end{matrix}$$

mit T. Das so definirte System T genügt dann der Gleichung $T^p = \Delta$, seine charakteristische Function ist $(\omega - z)^{r_1} (\omega^2 - z)^{r_2} \cdots (\omega^p - z)^{r_p}$ und seine Charakteristik daher $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$. Aus den Potenzen der Systeme A, T bilde man nun, unter Zuhülfenahme einer complexen Veränderlichen z, das System:

$$A^{p-1} + zA^{p-2}T + z^2A^{p-3}T^2 + \cdots + z^{p-2}AT^{p-2} + z^{p-1}T^{p-1},$$

und bezeichne die Determinante desselben mit $F\left|\begin{smallmatrix}\tau_1 \cdots \tau_n \\ z\end{smallmatrix}\right|$, setze also:

$$F\left|\begin{smallmatrix}\tau_1 \cdots \tau_n \\ z\end{smallmatrix}\right| = \left|A^{p-1} + zA^{p-2}T + \cdots + z^{p-2}AT^{p-2} + z^{p-1}T^{p-1}\right|. \tag{1}$$

Die so definirte Function F soll jetzt näher untersucht werden.

Zu dem Ende multiplicire man, indem man unter ν eine Zahl aus der Reihe 1, 2, ..., p, unter $f(z)$ die in Art. 2 durch die Gleichung $f(z) = |A - z\Delta|$ definirte Function versteht, die linke Seite der Gleichung (1) mit $f(\omega^\nu z)$, die rechte entsprechend mit $|A - \omega^\nu z\Delta|$ und führe zugleich auf der rechten Seite die Multiplication auf Grund der Regel $|A - \omega^\nu z\Delta|\,|B| = |(A - \omega^\nu z\Delta)B|$ aus. Man erhält dann zunächst die Gleichung:

$$f(\omega^\nu z)\,F\left|{}^{\tau_1 \cdots \tau_n}_{z}\right| = |A^p - z^p T^p + z(A^{p-1} + zA^{p-2}T + \cdots + z^{p-1}T^{p-1})(T - \omega^\nu \Delta)|\,.$$

Bezeichnet man das der ϱ^{ten} Horizontalreihe und der σ^{ten} Verticalreihe gemeinsame Element der rechts stehenden Determinante mit $e_{\varrho\sigma}$, die der ϱ^{ten} Horizontalreihe und der σ^{ten} Verticalreihe gemeinsame Grösse des Systems $A^{p-1} + zA^{p-2}T + \cdots + z^{p-1}T^{p-1}$ mit $e'_{\varrho\sigma}$ und beachtet, dass die entsprechenden Grössen der Systeme $A^p - z^pT^p$, $T - \omega^\nu\Delta$ die Werthe $\delta_{\varrho\sigma}(1 - z^p)$, $\delta_{\varrho\sigma}(\tau_\varrho - \omega^\nu)$ besitzen, so ergiebt sich:

$$e_{\varrho\sigma} = \delta_{\varrho\sigma}(1 - z^p) + ze'_{\varrho\sigma}(\tau_\sigma - \omega^\nu), \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

und man erkennt nunmehr ohne Mühe, dass die aus den n^2 Grössen $e_{\varrho\sigma}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, als Elementen gebildete Determinante, da r_ν der Grössen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ mit ω^ν identisch sind, als Product zweier Factoren, von denen der erste $(1 - z^p)^{r_\nu}$, der zweite eine mit E_{n-r_ν} zu bezeichnende Determinante vom Grade $n - r_\nu$ ist, dargestellt werden kann. Man hat daher auch:

$$f(\omega^\nu z)\,F\left|{}^{\tau_1 \cdots \tau_n}_{z}\right| = (1 - z^p)^{r_\nu} E_{n-r_\nu}$$

und erhält dann schliesslich, indem man linke und rechte Seite der letzten Gleichung durch $f(\omega^\nu z)$ dividirt und beachtet, dass

$$(1 - z^p)^{r_\nu} = (-1)^{(p+1)r_\nu}(\omega - z)^{r_\nu}(\omega^2 - z)^{r_\nu} \cdots (\omega^{p-\nu} - z)^{r_\nu}(\omega^{p-\nu+1} - z)^{r_\nu} \cdots (\omega^p - z)^{r_\nu},$$

$$f(\omega^\nu z) = \omega^{n\nu}(\omega - z)^{m_\nu+1}(\omega^2 - z)^{m_\nu+2} \cdots (\omega^{p-\nu} - z)^{m_p}(\omega^{p-\nu+1} - z)^{m_1} \cdots (\omega^p - z)^{m_\nu}$$

ist, für die Function F die Gleichung:

$$(2)\quad F\left|{}^{\tau_1 \cdots \tau_n}_{z}\right| = (-1)^{(p+1)r_\nu}\omega^{-n\nu}(\omega - z)^{r_\nu - m_\nu + 1}(\omega^2 - z)^{r_\nu - m_\nu + 2} \cdots$$
$$(\omega^{p-\nu} - z)^{r_\nu - m_p}(\omega^{p-\nu+1} - z)^{r_\nu - m_1} \cdots (\omega^p - z)^{r_\nu - m_\nu} E_{n-r_\nu}$$

Die gewonnene Gleichung die für $\nu = 1, 2, \ldots, p$ gilt, zeigt, dass die Function F für $z = 1$ stets verschwindet, wenn irgend eine der p Zahlen r grösser ist als die mit demselben Index behaftete Zahl m. Von den p Zahlen r ist aber, wie aus der Gleichung $r_1 + \cdots + r_p = n = m_1 + \cdots + m_p$ folgt, immer wenigstens eine grösser als die ihr entsprechende Zahl m, wenn nicht gleichzeitig $r_1 = m_1, \ldots, r_p = m_p$ ist. Es hat daher $F\left|\begin{smallmatrix}\tau_1 \cdots \tau_n \\ 1 \cdots 1\end{smallmatrix}\right|$ stets den Werth 0, wenn $(r_1, \ldots, r_p)$ und $(m_1, \ldots, m_p)$ verschiedene Charakteristiken sind. Das so erhaltene Resultat lässt sich nun auch, wie folgt, aussprechen:

„Die Determinante:

$$D_{(\tau)} = \left| A^{p-1} + A^{p-2}T + A^{p-3}T^2 + \cdots + AT^{p-2} + T^{p-1} \right|,$$

bei der das der ϱ^{ten} Horizontalreihe und der σ^{ten} Verticalreihe gemeinsame Element $d_{\varrho\sigma}$ sich aus den Grössen a und τ der Gleichung:

$$d_{\varrho\sigma} = a_{\varrho\sigma}^{(p-1)} + a_{\varrho\sigma}^{(p-2)}\tau_\sigma + a_{\varrho\sigma}^{(p-3)}\tau_\sigma^2 + \cdots + a_{\varrho\sigma}\tau_\sigma^{p-2} + \delta_{\varrho\sigma}\tau_\sigma^{p-1}$$

gemäss zusammensetzt, hat stets den Werth 0, wenn die Charakteristik $(r_1, \ldots, r_p)$ des Systems T von der Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ des Systems A verschieden ist.“

Führt man in die Determinante $D_{(\tau)}$, die in Bezug auf jede einzelne der n Grössen τ eine ganze rationale Function $(p-1)^{ten}$ Grades ist, an Stelle des Systems der n Buchstaben $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ der Reihe nach eine jede der p^n Variationen zur n^{ten} Classe mit Wiederholung, welche man aus den p Einheitswurzeln $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^p$ als Elementen bilden kann, ein und bildet die Summe der so entstehenden p^n Determinanten, so besitzt diese Summe den von Null verschiedenen Werth $p^n \mid A \mid^{p-1}$. Man erhält diesen Werth, wenn man beachtet, dass für jede ganze rationale Function $G(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ der Grössen τ, die in Bezug auf keine dieser Grössen von höherem als dem $(p-1)^{ten}$ Grade ist, die Gleichung:

$$\sum_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n}^{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^p} G(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = p^n G(0, 0, \ldots, 0)$$

besteht, bei der das auf der linken Seite stehende Summenzeichen andeuten soll, dass die Summe der Ausdrücke zu bilden ist, welche aus $G(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der

n Buchstaben $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ der Reihe nach eine jede der p^n vorher erwähnten Variationen treten lässt. Zu dem Werthe $p^n \mid A \mid^{p-1}$ der in Rede stehenden Summe von p^n Determinanten können aber nur diejenigen $N = \frac{n!}{m_1! \cdots m_p!}$ dieser p^n Determinanten Beiträge liefern, welche aus $D_{(\tau)}$ hervorgehen, wenn man darin auf die N möglichen Weisen m_1 der Grössen τ mit ω, m_2 mit ω^2, ..., m_p mit ω^p zusammenfallen lässt, da alle übrigen Determinanten, wie oben bewiesen wurde, den Werth Null haben, und es muss daher von den genannten N Determinanten wenigstens eine einen von Null verschiedenen Werth besitzen. Bezeichnet man nun noch das zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörige ausgezeichnete System:

$$\begin{matrix} \omega_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \omega_n \end{matrix},$$

bei dem

$$\omega_1 = \cdots = \omega_{m_1} = \omega, \quad \omega_{m_1+1} = \cdots = \omega_{m_1+m_2} = \omega^2, \quad \ldots, \quad \omega_{n-m_p+1} = \cdots = \omega_n = \omega^p$$

ist, mit Ω, so lässt sich das gewonnene Resultat auch so aussprechen:

„Unter den $N = \frac{n!}{m_1! \cdots m_p!}$ zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systemen T, welche aus dem Systeme Ω durch Permutation der in seiner Diagonale stehenden Grössen hervorgehen, giebt es immer wenigstens eines, für welches die Determinante:

$$D_{(\tau)} = \mid A^{p-1} + A^{p-2}T + \cdots + AT^{p-2} + T^{p-1} \mid$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt.“

4.

Aus einem gegebenen der Gleichung $A^p = \Delta$ genügenden Systeme A kann man auf folgende Weise unbegrenzt viele andere Systeme $\overline{A}$ ableiten, welche der Gleichung $\overline{A}^p = \Delta$ genügen und zugleich zu derselben Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehören wie das gegebene System A.

Man verstehe unter B irgend ein System, dessen Determinante $\mid B$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, und setze alsdann:

$$\overline{A} = B^{-1}AB.$$

Das definirte System $\overline{A}$ genügt dann der Gleichung $A^p = \Delta$ und gehört zugleich zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$. Die Richtigkeit der ersten Behauptung ergiebt sich aus der für jede positive ganze Zahl ν geltenden Gleichung:

$$\overline{A}^\nu = (B^{-1}AB)(B^{-1}AB)\cdots(B^{-1}AB) = B^{-1}A^\nu B,$$

wenn man darin $\nu = p$ setzt und beachtet, dass $B^{-1}A^pB = B^{-1}\Delta B = B^{-1}B = \Delta$ ist; die Richtigkeit der zweiten dagegen folgt aus der Gleichung:

$$|\overline{A} - z\Delta| = |B^{-1}(A - z\Delta)B| = |B^{-1}|\,|A - z\Delta|\,|B| = |A - z\Delta|,$$

welche aussagt, dass die charakteristische Funktion $|\overline{A} - z\Delta|$ des Systems $\overline{A}$ dieselbe ist, wie die charakteristische Funktion $|A - z\Delta|$ des Systems A. Lässt man nun an Stelle des Systems B ein jedes die Bedingung $|B| \neq 0$ nicht verletzende System treten, so erhält man, wenn man von dem speciellen Falle, wo $p - 1$ der Grössen m den Werth Null haben, absieht, unbegrenzt viele Systeme $\overline{A}$ der angegebenen Art.

Es drängt sich nun von selbst die Frage auf, ob man auf diese Weise alle Systeme $\overline{A}$ der angegebenen Art erhalten kann, oder, mit anderen Worten, ob es stets möglich ist, zu irgend zwei gegebenen, den Gleichungen $A^p = \Delta$, $A'^p = \Delta$ genügenden und zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systemen A, A' ein System B mit nicht verschwindender Determinante $|B|$ zu bestimmen, welches der Gleichung:

$$B^{-1}AB = A'$$

genügt. Diese Frage kann auf Grund der folgenden Betrachtungen entschieden werden.

Wie in Art. 3 bewiesen wurde, kann man zu dem Systeme A stets ein aus dem definirten Systeme Ω durch Permutation seiner Diagonalgrössen ableitbares System T bestimmen, für welches die Determinante:

$$D_{(\tau)} = |A^{p-1} + A^{p-2}T + \cdots + AT^{p-2} + T^{p-1}|$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Das so bestimmte System T entspreche der Permutation $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in

dem Sinne, dass die Gleichungen:

$$\tau_{x_1} = \cdots = \tau_{x_{m_1}} = \omega, \quad \tau_{x_{m_1+1}} = \cdots = \tau_{x_{m_1+m_2}} = \omega^2, \quad \ldots, \quad \tau_{x_{n-m_p+1}} = \cdots = \tau_{x_n} = \omega^p$$

bestehen. Man definire nun ein System S durch die Gleichung:

$$S = A^{p-1} + A^{p-2}T + \cdots + AT^{p-2} + T^{p-1}$$

und beachte, dass die Determinante $|S|$ desselben, die mit $D_{(\sigma)}$ identisch ist, einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Die Gleichungen:

$$AS = A^p + A^{p-1}T + \cdots + A^2T^{p-2} + AT^{p-1},$$
$$ST = A^{p-1}T + A^{p-2}T^2 + \cdots + AT^{p-1} + T^p$$

in Verbindung mit der Gleichung $A^p = \Delta = T^p$ zeigen dann, dass für das definirte System S die Gleichung $AS = ST$ und daher auch die Gleichung:

$$S^{-1}AS = T$$

besteht. Bildet man aus dieser Gleichung, indem man das aus dem Systeme Δ durch Permutation seiner Verticalreihen hervorgehende System:

$$\begin{matrix} \delta_{1x_1} \cdots \delta_{1x_n} \\ \cdots \quad \cdots \\ \delta_{nx_1} \cdots \delta_{nx_n} \end{matrix}$$

mit $\mathfrak{D}$ und dementsprechend das zu ihm reciproke mit $\mathfrak{D}^{-1}$ bezeichnet, die Gleichung:

$$\mathfrak{D}^{-1}S^{-1}AS\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{-1}T\mathfrak{D},$$

beachtet, dass

$$T\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\Omega$$

ist, und setzt alsdann:

$$S\mathfrak{D} = \mathfrak{S}$$

und dementsprechend $\mathfrak{D}^{-1}S^{-1} = \mathfrak{S}^{-1}$, so erhält man schliesslich die Gleichung:

$$\mathfrak{S}^{-1}A\mathfrak{S} = \Omega.$$

Auf dieselbe Weise kann man zu dem Systeme A' ein System $\mathfrak{S}'$ bestimmen, welches der Gleichung:

$$\mathfrak{S}'^{-1}A'\mathfrak{S}' = \Omega$$

genügt.

Damit ist die Grundlage zur Beantwortung der oben gestellten Frage gewonnen. Beachtet man nämlich, dass aus den beiden zuletzt angeschriebenen Gleichungen die Gleichung:

$$\mathfrak{S}^{-1} A \mathfrak{S} = \mathfrak{S}'^{-1} A' \mathfrak{S}'$$

und aus dieser die Gleichung:

$$\mathfrak{S}' \mathfrak{S}^{-1} A \mathfrak{S} \mathfrak{S}'^{-1} = A'$$

folgt, und setzt alsdann:

$$\mathfrak{S} \mathfrak{S}'^{-1} = \mathfrak{B}$$

und dementsprechend $\mathfrak{S}' \mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{B}^{-1}$, so erkennt man, dass das so definirte System $\mathfrak{B}$ der Gleichung:

$$\mathfrak{B}^{-1} A \mathfrak{B} = A'$$

genügt.

Nachdem so die aufgeworfene Frage eine Beantwortung in bejahendem Sinne erhalten hat, ist eine weitere Frage die, ob ausser dem gewonnenen Systeme $B = \mathfrak{B}$ nicht noch andere der Gleichung $B^{-1} A B = A'$ genügende Systeme B existiren. Zur Entscheidung dieser Frage nehme man an, dass $B = \overline{\mathfrak{B}}$ ein zweites der aufgestellten Gleichung genügendes System sei. Bringt man dann unter Benutzung der vorher gewonnenen Systeme $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ das System $\overline{\mathfrak{B}}$ in die durch die Gleichung:

$$\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{S} U \mathfrak{S}'^{-1}$$

bestimmte Gestalt, was immer und nur auf eine Weise möglich ist, da aus der angeschriebenen Gleichung umgekehrt $U = \mathfrak{S}^{-1} \overline{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}'$ folgt, beachtet, dass dann $\overline{\mathfrak{B}}^{-1} = \mathfrak{S}' U^{-1} \mathfrak{S}^{-1}$ wird, und führt die für $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{B}}^{-1}$ aufgestellten Ausdrücke in die Gleichung $\overline{\mathfrak{B}}^{-1} A \overline{\mathfrak{B}} = A'$ ein, so erhält man die Gleichung:

$$\mathfrak{S}' U^{-1} \mathfrak{S}^{-1} A \mathfrak{S} U \mathfrak{S}'^{-1} = A'$$

und erkennt, wenn man noch die vorher gewonnenen Gleichungen $\mathfrak{S}^{-1} A \mathfrak{S} = \Omega$, $\mathfrak{S}'^{-1} A' \mathfrak{S}' = \Omega$ berücksichtigt, dass das zur Darstellung von $\overline{\mathfrak{B}}$ verwendete System U stets der Gleichung:

$$U^{-1} \Omega U = \Omega$$

genügt. Versteht man umgekehrt unter U irgend ein der Gleichung

$U^{-1}\Omega U = \Omega$ genügendes System und setzt dann $\mathfrak{B} = \mathfrak{S} U \mathfrak{S}'^{-1}$, so genügt das so definirte System $\overline{\mathfrak{B}}$ stets der Gleichung $\overline{\mathfrak{B}}^{-1} A \overline{\mathfrak{B}} = A'$. Aus den beiden gewonnenen Resultaten folgt nun schliesslich, dass es unbegrenzt viele Systeme B giebt, die der Gleichung:

$$B^{-1} A B = A'$$

genügen, und dass man diese sämmtlich erhält, und zwar ein jedes nur einmal, wenn man

$$B = \mathfrak{S} U \mathfrak{S}'^{-1}$$

setzt und dann an Stelle des Systems U ein jedes der Gleichung:

$$U^{-1}\Omega U = \Omega$$

genügende System U treten lässt. Setzt man speciell $U = \Delta$, so wird $B = \mathfrak{B}$.

Mit Rücksicht auf das soeben ausgesprochene Endresultat soll jetzt zum Schlusse noch das allgemeinste der Gleichung $U^{-1}\Omega U = \Omega$ genügende System U aufgestellt werden. Zu dem Ende beachte man, dass die Gleichung $U^{-1}\Omega U = \Omega$ durch die Gleichung $\Omega U = U\Omega$ ersetzt werden kann, wenn man zu der letzteren noch die Bedingung $|U| \neq 0$ hinzunimmt, und dass aus der Gleichung $\Omega U = U\Omega$ sich für die Grösse $u_{\varrho\sigma}$ des zu bestimmenden Systems U unmittelbar die Gleichung:

$$(\omega_\varrho - \omega_\sigma) u_{\varrho\sigma} = 0 \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

ergiebt. Diese Gleichung zeigt, dass $u_{\varrho\sigma}$ stets den Werth 0 hat, wenn $\omega_\varrho \neq \omega_\sigma$ ist; dagegen liefert sie für $u_{\varrho\sigma}$ keine Bedingung, wenn $\omega_\varrho = \omega_\sigma$ ist. Dieser letztere Fall liegt, da

$$\omega_1 = \cdots = \omega_{m_1} = \omega, \quad \omega_{m_1+1} = \cdots = \omega_{m_1+m_2} = \omega^2, \ldots, \quad \omega_{n-m_p+1} = \cdots = \omega_n = \omega^p$$

ist, dann aber auch nur dann vor, wenn die Zahlen ϱ, σ beide aus einer der p Zahlenreihen $1, 2, \ldots, m_1$; $m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2$; $\ldots$; $n - m_p + 1, \ldots, n$ genommen sind. Beachtet man nun noch, dass aus den n^2 Gleichungen $(\omega_\varrho - \omega_\sigma) u_{\varrho\sigma} = 0$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, rückwärts wieder die Gleichung $\Omega U = U\Omega$ folgt, so erkennt man, dass das allgemeinste der Gleichung:

$$U^{-1}\Omega U = \Omega$$

genügende System U durch das Schema:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
u_{11} & \cdots & u_{1m_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
u_{m_1 1} & \cdots & u_{m_1 m_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & \cdot & & & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdots & \cdot & & \ddots & & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & \cdots & 0 & & & \cdot & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-m_p+1,\,n-m_p+1} & \cdots & u_{n-m_p+1,\,n} \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n,\,n-m_p+1} & \cdots & u_{nn}
\end{array}\right|$$

repräsentirt wird, wenn man dabei unter den u, $m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2$ an der Zahl, unbestimmte Grössen versteht, die nur den p mit der Bedingung $|U| \neq 0$ äquivalenten Bedingungen:

$$\left|\begin{array}{ccc} u_{11} & \cdots & u_{1m_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{m_1 1} & \cdots & u_{m_1 m_1} \end{array}\right| \neq 0, \quad \ldots, \quad \left|\begin{array}{ccc} u_{n-m_p+1,\,n-m_p+1} & \cdots & u_{n-m_p+1,\,n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n,\,n-m_p+1} & \cdots & u_{nn} \end{array}\right| \neq 0$$

zu genügen haben.

5.

Die im vorigen Artikel durchgeführten Untersuchungen haben gezeigt, dass man aus irgend einem gegebenen der Gleichung $A^p = \Delta$ genügenden und zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systeme A alle Systeme $\overline{A}$, welche der Gleichung $\overline{A}^p = \Delta$ genügen und zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehören, und zwar jedes derselben unendlich oft erhält, wenn man $\overline{A} = B^{-1}AB$ setzt und alsdann an Stelle des Systems der n^2 Grössen $b_{\varrho\sigma}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, ein jedes die Bedingung $|B| \neq 0$ nicht verletzende System von n^2 Werthen treten lässt. Zur Verwerthung dieses Resultates wird man von einem möglichst einfachen Systeme A ausgehen. Als solches empfiehlt sich das am Ende des Art. 3 definirte, zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörige, ausgezeichnete System Ω. Legt man dieses System zu Grunde, so geht aus dem soeben ausgesprochenen Resultate der folgende Satz hervor:

„Man erhält alle der Gleichung $A^p = \Delta$ genügenden und zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systeme A und zwar jedes derselben unendlich oft, wenn man

$$A = B^{-1}\Omega B$$

setzt und alsdann an Stelle des Systems der n^2 Gröfsen $b_{\varrho\sigma}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, ein jedes die Bedingung $|B| \neq 0$ nicht verletzende System von n^2 Werthen treten lässt.“

Ist auf diese Weise aus Ω mit Hülfe eines Systems B ein System A abgeleitet worden, so soll B das erzeugende, A das erzeugte System genannt werden. Um den innern Zusammenhang zwischen einem so erzeugten Systeme A und dem erzeugenden B zu erkennen, verstehe man unter $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, unter T dasjenige aus Ω durch Permutation der in seiner Diagonale stehenden Grössen hervorgehende System, bei welchem

$$\tau_{\varkappa_\sigma} = \omega_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, bilde alsdann für das System A die Determinante:

$$D_{(\tau)} = |A^{p-1} + A^{p-2}T + \cdots + AT^{p-2} + T^{p-1}|$$

und ersetze darin allgemein die Potenz A^ν durch den ihr auf Grund der Gleichung $A = B^{-1}\Omega B$ entsprechenden Ausdruck $B^{-1}\Omega^\nu B$. Man erhält dann für $D_{(\tau)}$ zunächst die Gleichung:

$$D_{(\tau)} = |B^{-1}(\Omega^{p-1}B + \Omega^{p-2}BT + \cdots + \Omega BT^{p-2} + BT^{p-1})|,$$

und weiter, wenn man noch zur Abkürzung:

$$\Omega^{p-1}B + \Omega^{p-2}BT + \cdots + \Omega BT^{p-2} + BT^{p-1} = C$$

setzt, die Gleichung:

$$D_{(\tau)} = |B^{-1}|\,|C|.$$

Das Element $c_{\varrho\sigma}$ der Determinante $|C|$ ist definirt durch die Gleichung:

$$c_{\varrho\sigma} = b_{\varrho\sigma}\left(\sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \omega_\varrho^{p-1-\nu}\tau_\sigma^\nu\right). \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

Ersetzt man in ihr die Zahl σ durch die Zahl $\varkappa_\sigma$ und beachtet, dass $\tau_{\varkappa_\sigma} = \omega_\sigma$ ist, so ergiebt sich die Gleichung:

$$c_{\varrho\varkappa_\sigma} = b_{\varrho\varkappa_\sigma}\left(\sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \omega_\varrho^{p-1-\nu}\omega_\sigma^\nu\right). \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende, in runde Klammern

eingeschlossene Summe hat nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth $p\omega_\varrho^{p-1}$, wenn $\omega_\varrho = \omega_\sigma$ ist. Dieser Fall liegt aber, da

$$\omega_1 = \cdots = \omega_{m_1} = \omega,\ \omega_{m_1+1} = \cdots = \omega_{m_1+m_2} = \omega^2,\ \ldots,\ \omega_{n-m_p+1} = \cdots = \omega_n = \omega^p$$

ist, nur dann vor, wenn die Zahlen ϱ, σ beide aus einer der p Zahlenreihen $1, 2, \ldots, m_1;\ m_1+1, \ldots, m_1+m_2;\ \ldots.;\ n-m_p+1, \ldots, n$ genommen sind. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich, wenn man noch zur Abkürzung:

$$p^n(\omega^{m_1+2m_2+\cdots+pm_p})^{p-1} = f$$

setzt, die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c_{1\varkappa_1} \cdots c_{1\varkappa_n} \\ \cdots \\ c_{n\varkappa_1} \cdots c_{n\varkappa_n} \end{vmatrix} = f \cdot \begin{vmatrix} b_{1\varkappa_1} \cdots b_{1\varkappa_{m_1}} & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m_1\varkappa_1} \cdots b_{m_1\varkappa_{m_1}} & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 \cdots 0 & \cdot & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots 0 & \cdot & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & b_{n-m_p+1,\varkappa_{n-m_p+1}} \cdots b_{n-m_p+1,\varkappa_n} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & b_{n,\varkappa_{n-m_p+1}} \cdots b_{n\varkappa_n} & & \end{vmatrix},$$

und man erhält dann, wenn man die Gleichung:

$$\sum \pm c_{11} \cdots c_{nn} = (-1)^{g(\varkappa)} \sum \pm c_{1\varkappa_1} \cdots c_{n\varkappa_n}$$

— bei der unter $g_{(\varkappa)}$ die Anzahl der in der Permutation $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ enthaltenen Inversionen zu verstehen ist — beachtet und die p Determinanten:

$$\begin{vmatrix} b_{1\varkappa_1} \cdots b_{1\varkappa_{m_1}} \\ \cdots \\ b_{m_1\varkappa_1} \cdots b_{m_1\varkappa_{m_1}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{m_1+1,\varkappa_{m_1+1}} \cdots b_{m_1+1,\varkappa_{m_1+m_2}} \\ \cdots \\ b_{m_1+m_2,\varkappa_{m_1+1}} \cdots b_{m_1+m_2,\varkappa_{m_1+m_2}} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} b_{n-m_p+1,\varkappa_{n-m_p+1}} \cdots b_{n-m_p+1,\varkappa_n} \\ \cdots \\ b_{n,\varkappa_{n-m_p+1}} \cdots b_{n\varkappa_n} \end{vmatrix},$$

welche in der zuletzt angeschriebenen Determinante als partielle Determinanten auftreten, zur Abkürzung mit

$$B^{(1)}_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_{m_1}},\quad B^{(2)}_{\varkappa_{m_1+1} \cdots \varkappa_{m_1+m_2}},\quad \ldots,\quad B^{(p)}_{\varkappa_{n-m_p+1} \cdots \varkappa_n}$$

bezeichnet, schliesslich für $D_{(\tau)}$ die Gleichung:

$$D_{(\tau)} = p^n(\omega^{m_1+2m_2+\cdots+pm_p})^{p-1}\frac{(-1)^{\varphi(\varkappa)}}{|B|}B^{(1)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_{m_1}}\cdots B^{(p)}_{\varkappa_n-m_p+1\cdots\varkappa_n}.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun unmittelbar der Satz:

„Die auf das System $A = B^{-1}\Omega B$ bezogene Determinante:

$$D_{(\tau)} = |A^{p-1} + A^{p-2}T + \cdots + AT^{p-2} + T^{p-1}|$$

hat für

$$\tau_{\varkappa_1} = \cdots = \tau_{\varkappa_{m_1}} = \omega,\ \tau_{\varkappa_{m_1+1}} = \cdots = \tau_{\varkappa_{m_1+m_2}} = \omega^2,\ \ldots,\ \tau_{\varkappa_n-m_p+1} = \cdots = \tau_{\varkappa_n} = \omega^p$$

dann aber auch nur dann den Werth Null, wenn das Product:

$$B^{(1)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_{m_1}}B^{(2)}_{\varkappa_{m_1+1}\cdots\varkappa_{m_1+m_2}}\cdots B^{(p)}_{\varkappa_n-m_p+1\cdots\varkappa_n}$$

den Werth Null besitzt.“

Da die n^2 Grössen b eines erzeugenden Systems B nur der Bedingung $|B| \neq 0$ zu genügen haben, so wird die auf eines der erzeugten Systeme A bezogene Determinante $D_{(\tau)}$ im allgemeinen für jedes der $\frac{n!}{m_1!\ldots m_p!}$ aus Ω durch Permutation seiner Diagonalgrössen ableitbaren Systeme T einen von Null verschiedenen Werth besitzen. Andererseits hat diese Determinante, wie übrigens schon am Ende des Art. 3 bewiesen wurde, zum mindesten für eines der eben erwähnten Systeme T einen von Null verschiedenen Werth. Auf Grund des sogenannten Laplace'schen Determinantensatzes besteht nämlich die Gleichung:

$$\sum_{\varkappa_1\cdots\varkappa_n}(-1)^{\varphi(\varkappa)}B^{(1)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_{m_1}}\cdots B^{(p)}_{\varkappa_n-m_p+1\cdots\varkappa_n} = m_1!\ldots m_p!\,|B|$$

— bei der das Summenzeichen andeutet, dass die Summe der Ausdrücke zu bilden ist, welche aus dem hinter ihm stehenden allgemeinen Gliede hervorgehen, wenn man darin an Stelle von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ eine jede Permutation der Zahlen 1, 2, …, n treten lässt — und diese zeigt, dass das Product $B^{(1)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_{m_1}}\cdots B^{(p)}_{\varkappa_n-m_p+1\cdots\varkappa_n}$ nicht für jede Permutation $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ der Zahlen 1, 2, …, n verschwinden kann, wenn anders die Determinante $|B|$ einen von Null verschiedenen Werth haben soll.

6.

Man gehe jetzt auf den zu Anfang des vorigen Artikels ausgesprochenen Satz zurück. Dieser Satz sagt aus, dass die n^2 Gröfsen $a_{\varrho\sigma}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$,

des allgemeinsten der Gleichung $A^p = \Delta$ genügenden und zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systems A durch die der Gleichung $A = B^{-1}\Omega B$ entsprechenden Gleichungen:

$$a_{\varrho\sigma} = \omega \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=m_1} \frac{\beta_{\varepsilon\varrho}}{|B|} b_{\varepsilon\sigma} + \omega^2 \sum_{\varepsilon=m_1+1}^{\varepsilon=m_1+m_2} \frac{\beta_{\varepsilon\varrho}}{|B|} b_{\varepsilon\sigma} + \cdots + \omega^p \sum_{\varepsilon=n-m_p+1}^{\varepsilon=n} \frac{\beta_{\varepsilon\varrho}}{|B|} b_{\varepsilon\sigma}$$

$$(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt werden, wenn man dabei unter den $b_{\varrho\sigma}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, unbestimmte Grössen versteht, die nur der Bedingung $|B| \neq 0$ zu genügen haben. Auf diese Weise sind die Grössen a, da die Determinante $|B|$ und die zu ihren Elementen b gehörigen Adjuncten β rationale Functionen der b sind, als rationale Functionen der n^2 von einander unabhängigen Parameter b dargestellt. Dass ausser dieser allgemeinen Darstellung aber auch noch einfachere Darstellungen möglich sind, lässt sich aus der in dem oben erwähnten Satze angeführten Thatsache schliessen, dass auf Grund dieser Darstellung jedes System A der angegebenen Art unendlich oft erhalten wird, wenn man an Stelle des Systems der n^2 Grössen b ein jedes die Bedingung $|B| \neq 0$ nicht verletzende System von n^2 Werthen treten lässt. Als einfachste Darstellungen wird man nun solche anzusehen haben, bei denen nicht mehr von einander unabhängige Parameter vorkommen, als unbedingt erforderlich sind, und bei denen dann das System dieser Parameter und das System der von ihnen abhängigen Grössen a in wechselseitig eindeutiger Beziehung stehen. Zu solchen einfachsten Darstellungen gelangt man durch die folgenden Betrachtungen.

Man nehme an, dass ein System A das eine Mal durch das System B, das andere Mal durch das System B' erzeugt sei, dass also die Gleichungen:

$$B^{-1}\Omega B = A, \qquad B'^{-1}\Omega B' = A$$

bestehen. Bildet man dann durch passende Verbindung dieser Gleichungen die Gleichung $BB'^{-1}\Omega B'B^{-1} = \Omega$ und beachtet, dass BB'^{-1} zu $B'B^{-1}$ reciprok ist, so erkennt man, dass das System $B'B^{-1}$ stets eine Lösung U der Gleichung:

$$U^{-1}\Omega U = \Omega$$

ist, und dass daher B' sich immer in die durch die Gleichung:

$$B' = UB$$

bestimmte Gestalt bringen lässt, wobei U ein System von der am Ende des Art. 4 charakterisirten Art bezeichnet. Da aber auch umgekehrt jedes mit einer Lösung U der Gleichung $U^{-1}\Omega U = \Omega$ gebildete System $B' = UB$ der Gleichung $B'^{-1}\Omega B' = A$ genügt, wenn nur B der Gleichung $B^{-1}\Omega B = A$ genügt, so lässt sich der folgende Satz aussprechen:

„Alle Systeme B', welche aus Ω dasselbe System A, der Gleichung $B'^{-1}\Omega B' = A$ gemäss, erzeugen, können aus einem derselben, B, erhalten werden, wenn man — unter U das am Ende des Art. 4 charakterisirte System verstehend —

$$B' = UB$$

setzt und alsdann an Stelle des Systems der $m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2$ Grössen u ein jedes die Bedingung $|U| \neq 0$ nicht verletzende System von $m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2$ Werthen treten lässt.“

Die Grössen b' des Systems $B' = UB$ sind mit den Grössen b des Systems B verknüpft durch die n^2 Gleichungen:

$$(1) \qquad b'_{\varrho\sigma} = \sum_{s=s_{\mu-1}+1}^{s=s_\mu} u_{\varrho s} b_{s\sigma}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\left(\begin{matrix}\varrho = s_{\mu-1}+1, \ldots, s_\mu \\ \sigma = 1, 2, \ldots, n\end{matrix}\right)$$

bei denen zur Abkürzung:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_\mu = s_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

gesetzt ist und unter s_0 die Zahl 0 zu verstehen ist. Greift man nun aus diesen Gleichungen, indem man unter $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ eine Permutation der Zahlen 1, 2, ..., n versteht, die m_μ^2 Gleichungen:

$$(2) \qquad b'_{\varrho\varkappa_\sigma} = \sum_{s=s_{\mu-1}+1}^{s=s_\mu} u_{\varrho s} b_{s\varkappa_\sigma}$$

$$(\varrho, \sigma = s_{\mu-1}+1, \ldots, s_\mu)$$

heraus und bildet auf Grund dieser Gleichungen die Determinante der m_μ^2 Grössen $b'_{\varrho\varkappa_\sigma}$, $\varrho, \sigma = s_{\mu-1}+1, \ldots, s_\mu$, so ergiebt sich, unter Benutzung der am Ende von Seite 22 für ausgezeichnete Unterdeterminanten verwendeten

Bezeichnungsweise, die Gleichung:

$$(3) \qquad B'^{(\mu)}_{\varkappa_{s_{\mu-1}+1}\cdots\varkappa_{s_\mu}} = U^{(\mu)}_{s_{\mu-1}+1\cdots s_\mu} B^{(\mu)}_{\varkappa_{s_{\mu-1}+1}\cdots\varkappa_{s_\mu}} \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

und weiter dann, da $U^{(1)}_{1\cdots m_1}\cdots U^{(p)}_{n-m_p+1\cdots n} = |U|$ ist, die Gleichung:

$$(4) \qquad B'^{(1)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_{m_1}}\cdots B'^{(p)}_{\varkappa_{n-m_p+1}\cdots\varkappa_n} = |U| \cdot B^{(1)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_{m_1}}\cdots B^{(p)}_{\varkappa_{n-m_p+1}\cdots\varkappa_n}.$$

Das Product $B^{(1)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_{m_1}}\cdots B^{(p)}_{\varkappa_{n-m_p+1}\cdots\varkappa_n}$ soll mit Rücksicht auf das am Schlusse des Art. 5 Bemerkte das der Permutation $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ entsprechende Laplace'sche Product des Systems B genannt und im Folgenden mit $P^{(b)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_n}$ bezeichnet werden. Wählt man nun, was nach dem am Schlusse des vorigen Artikels Bemerkten bei von Null verschiedenem $|B|$ immer möglich ist, eine solche Permutation $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, für welche $P^{(b)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_n}$ und damit auch eine jede der p Grössen $B^{(\mu)}_{\varkappa_{s_{\mu-1}+1}\cdots\varkappa_{s_\mu}}$, $\mu=1,2,\ldots,p$, einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so kann man, da $B^{(\mu)}_{\varkappa_{s_{\mu-1}+1}\cdots\varkappa_{s_\mu}}$ die Determinante der m_μ^2 die rechten Seiten der Gleichungen (2) bildenden linearen Formen der u ist, die m_μ^2 Grössen $u_{\varrho s}$, $\varrho, s = s_{\mu-1}+1,\ldots,s_\mu$, immer und nur auf eine Weise so bestimmen, dass die m_μ^2 Grössen $b'_{\varrho\varkappa_\sigma}$, $\varrho,\sigma = s_{\mu-1}+1,\ldots,s_\mu$, mit m_μ^2 vorgegebenen Grössen $g_{\varrho\varkappa_\sigma}$, $\varrho,\sigma = s_{\mu-1}+1,\ldots,s_\mu$, zusammenfallen. Die m_μ^2 so bestimmten Grössen u werden aber, wie die Gleichung (3) zeigt, nur dann der Bedingung $U^{(\mu)}_{s_{\mu-1}+1\cdots s_\mu} \neq 0$ genügen, wenn die m_μ^2 vorgegebenen Grössen g so gewählt sind, das $B'^{(\mu)}_{\varkappa_{s_{\mu-1}+1}\cdots\varkappa_{s_\mu}}$ für $b'_{\varrho\varkappa_\sigma} = g_{\varrho\varkappa_\sigma}$, $\varrho,\sigma = s_{\mu-1}+1,\ldots,s_\mu$, einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Da diese Betrachtung für jedes μ von 1 bis p gilt, so ergiebt sich unter Beachtung der Gleichung $U^{(1)}_{1\cdots m_1}\cdots U^{(p)}_{n-m_p+1\cdots n} = |U|$ schliesslich, dass man bei von Null verschiedenem $P^{(b)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_n}$ die $m_1^2+\cdots+m_p^2$ Grössen des Systems U im Rahmen der Bedingung $|U| \neq 0$ immer und nur auf eine Weise so bestimmen kann, dass die $m_1^2+\cdots+m_p^2$ Grössen $b'_{\varrho\varkappa_\sigma}$, $\varrho,\sigma = s_{\mu-1}+1,\ldots,s_\mu$; $\mu=1,2,\ldots,p$, welche in dem mit $P^{(b)}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_n}$ durch die Gleichung (4) verknüpften Laplace'schen Producte $P^{(b')}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_n}$ des Systems B' vorkommen, sich mit $m_1^2+\cdots+m_p^2$ vorgegebenen Grössen $g_{\varrho\varkappa_\sigma}$, $\varrho,\sigma = s_{\mu-1}+1,\ldots,s_\mu$; $\mu=1,2,\ldots,p$, decken, wenn nur diese Grössen g an Stelle

der b' gesetzt dem Producte $P^{(b')}_{x_1 \cdots x_n}$ einen von Null verschiedenen Werth ertheilen. Beachtet man nun noch, dass nach dem im vorigen Artikel Bewiesenen die oben gemachte Annahme, dass das Laplace'sche Product $P^{(b)}_{x_1 \cdots x_n}$ des Systems B einen von Null verschiedenen Werth besitzt, äquivalent ist mit der Annahme, dass bei dem durch B aus Ω erzeugten Systeme $A = B^{-1}\Omega B$ die Determinante:

$$D_{(\tau)} = \left| A^{p-1} + A^{p-2}T + \cdots + AT^{p-2} + T^{p-1} \right|$$

für

$$\tau_{x_1} = \cdots = \tau_{x_{m_1}} = \omega, \quad \tau_{x_{m_1+1}} = \cdots = \tau_{x_{m_1+m_2}} = \omega^2, \ \ldots, \ \tau_{x_{n-m_p+1}} = \cdots = \tau_{x_n} = \omega^p$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so lässt sich das Resultat der letzten Untersuchung, wie folgt, aussprechen:

„Besitzt bei einem der Gleichung $A^p = \Delta$ genügenden und zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systeme A die Determinante:

$$D_{(\tau)} = \left| A^{p-1} + A^{p-2}T + \cdots + AT^{p-2} + T^{p-1} \right|,$$

für

$$\tau_{x_1} = \cdots = \tau_{x_{m_1}} = \omega, \quad \tau_{x_{m_1+1}} = \cdots = \tau_{x_{m_1+m_2}} = \omega^2, \ \ldots, \ \tau_{x_{n-m_p+1}} = \cdots = \tau_{x_n} = \omega^p$$

einen von Null verschiedenen Werth, so giebt es unter den unendlich vielen Systemen B, welche das System A aus Ω der Gleichung:

$$B^{-1}\Omega B = A$$

gemäss erzeugen, immer eines aber auch nur eines, bei dem die $m_1^2 + \cdots + m_p^2$ in dem Laplace'schen Producte:

$$P^{(b)}_{x_1 \ldots x_n} = B^{(1)}_{x_1 \ldots x_{m_1}} B^{(2)}_{x_{m_1+1} \cdots x_{m_1+m_2}} \cdots B^{(p)}_{x_{n-m_p+1} \cdots x_n}$$

vorkommenden Grössen $b_{\varrho x_\sigma}$, $\varrho, \sigma = s_{\mu-1}+1, \ldots, s_\mu$; $\mu = 1, 2, \ldots, p$, sich mit irgend $m_1^2 + \cdots + m_p^2$ vorgegebenen, die Bedingung $P^{(\varrho)}_{x_1 \ldots x_n} \neq 0$ nicht verletzenden Grössen $g_{\varrho x_\sigma}$, $\varrho, \sigma = s_{\mu-1}+1, \ldots, s_\mu$; $\mu = 1, 2, \ldots, p$, decken.“

Aus diesem Satze ergiebt sich nun, wenn man noch berücksichtigt, dass auch umgekehrt ein System B mit nicht verschwindender Determinante $|B|$, bei dem das Laplace'sche Product $P^{(b)}_{x_1 \ldots x_n}$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, aus Ω stets ein System A von der im Satze

angegebenen Art erzeugt, schliesslich der folgende, das Wesentliche der in dieser Arbeit gewonnenen Resultate enthaltende Satz:

„Man erhält alle der Gleichung $A^p = \Delta$ genügenden und zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systeme A und zwar jedes derselben unendlich oft, wenn man

$$A = B^{-1}\Omega B$$

setzt und alsdann an Stelle des Systems der n^2 Grössen, $b_{\varrho\sigma}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, ein jedes die Bedingung $|B| \neq 0$ nicht verletzende System von n^2 Werthen treten lässt. Die auf irgend eines dieser Systeme A bezogene Determinante:

$$D_{(\tau)} = |A^{p-1} + A^{p-2}T + \cdots + AT^{p-2} + T^{p-1}|$$

besitzt, wenn A nicht von speciellem Charakter ist, für jedes, im anderen Falle zum mindesten für eines der $\frac{n!}{m_1! \ldots m_p!}$ aus dem Systeme Ω durch Permutation seiner Diagonalgrössen hervorgehenden Systeme T einen von Null verschiedenen Werth. Greift man daher aus der Totalität der zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systeme A die Gruppe derjenigen heraus, bei denen die Determinante $D_{(\tau)}$ für $\tau_{x_1} = \cdots = \tau_{x_{m_1}} = \omega$, $\tau_{x_{m_1+1}} = \cdots = \tau_{x_{m_1+m_2}} = \omega^2, \ldots,$ $\tau_{x_{n-m_p+1}} = \cdots = \tau_{x_n} = \omega^p$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so enthält diese Gruppe jedenfalls alle zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systeme A von allgemeinem Charakter. Alle dieser Gruppe angehörigen Systeme A erhält man, und nur diese allein, auch jedes derselben nur einmal, wenn man

$$A = B^{-1}\Omega B$$

setzt, dabei den $m_1^2 + \cdots + m_p^2$ Grössen $b_{\varrho x_\sigma}$, $\varrho, \sigma = s_{\mu-1}+1, \ldots, s_\mu$; $\mu = 1, 2, \ldots, p$, des Systems B irgend welche feste, die Bedingung:

$$B^{(1)}_{x_1 \cdots x_{m_1}} B^{(2)}_{x_{m_1+1} \cdots x_{m_1+m_2}} \cdots B^{(p)}_{x_{n-m_p+1} \cdots x_n} \neq 0$$

nicht verletzende Werthe beilegt und alsdann an Stelle der $n^2 - m_1^2 - \cdots - m_p^2$ übrigen Grössen b ein jedes die Bedingung $|B| \neq 0$ nicht verletzende System von $n^2 - m_1^2 - \cdots - m_p^2$ Werthen treten lässt. Die Mannigfaltigkeit der der Gleichung $A^p = \Delta$ genügenden und zur Charakteristik $(m_1, \ldots, m_p)$ gehörigen Systeme A ist daher eine $(n^2 - m_1^2 - \cdots - m_p^2)$-fache."

Würzburg, im Juli 1892.

JUL 18 1949